Correction Devoir maison n°7

Exercice 1

Exercice 14A (cours)

Résoudre les systèmes suivants

1. On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 1 \\ x & + & 3y & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 4y & = & 1 & \\ & & 2y & = & 5 & \quad 2L_2 - L_1 \to L_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x & = & 1-10 \\ y & = & \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système a une unique solution : } \mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}.}$$

2. On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ 6x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & = & 0 & \\ & & 0 & = & 0 & \quad 3L_1 - L_2 \to L_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\dfrac{3}{2}y \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{3}{2}y, y\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Exercice 14B (Application)

Résoudre les systèmes suivants :

1. On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 & \\ & & 2y & + & z & = & 1 & \quad L_2 - L_1 \to L_2 \\ & - & 2y & + & 4z & = & -1 & \quad L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 & \\ & & 2y & + & z & = & 1 & \\ & & & & 5z & = & 0 & \quad L_2 + L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x & = & 1 - \dfrac{1}{2} \\ 2y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{4} \\ y & = & \dfrac{1}{2} \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système admet donc une unique solution : } \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)\right\}.}$$

2. On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 & \\ & & y & - & 4z & = & 0 & 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ & - & y & + & 4z & = & 0 & 2L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 & \\ & & y & - & 4z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & L_2 + L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x & = & -10z \\ y & = & 4z \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -5z \\ y & = & 4z \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est alors } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -5z \\ 4z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 15A (cours)

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_1 - 2L_2 \to L_2$$

La matrice A est inversible car les pivots sont non nuls.

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 5L_1 - 3L_2 \to L_1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (1/10)L_1 \to L_1 \\ (1/5)L_2 \to L_2 \end{array}$$

On obtient alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

2. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 2L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 + L_2 \to L_3$$

La méthode de Gauss a fait apparaitre 3 pivot dont un est nul.

$$\boxed{\text{La matrice } B \text{ n'est pas inversible.}}$$

Exercice 15B (Application)

On calcule l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c|cc}
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 2L_3 - L_1 \to L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -14 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} L_1 + 3L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - 7L_2 \to L_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -14 \end{pmatrix} & L_3 + 2L_1 \to L_1 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} \frac{1}{2}L_1 \to L_1 \\ \\ \frac{1}{-4}L_3 \to L_3 \end{array}
\end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls,

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ est inversible et } C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2 (Inverse de matrice et résolution de système)

1.

$$\begin{array}{c|cc}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 - L_2 \to L_2 \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_3 - L_2 \to L_3
\end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaitre 3 pivot dont un est nul.

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ n'est pas inversible.}}$$

2. (a) On calcule l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} 5L_1 + L_2 \to L_1 \\ \\ 5L_3 + 2L_2 \to L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 5 & 30 & -5 \\ 15 & -85 & 20 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} 7L_1 - L_3 \to L_1 \\ 7L_2 + 4L_3 \to L_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} \frac{1}{35}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{35}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{7}L_3 \to L_3 \end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls,

$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -17 & 4 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix}.}$$

(b) On remarque que le système linéaire : $\begin{cases} 3x + 2y - z & = 5 \\ x - y + z & = 1 \\ 2x - 4y + 5z & = -3 \end{cases}$ est équivalent à

$$MX = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X = M^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Après calcul, le système a une unique solution

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

3. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} -2x - 2y + z = \lambda x \\ -2x + y - 2z = \lambda y \\ x - 2y - 2z = \lambda z \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?
On a

$$(E_\lambda) \iff \begin{cases} -(2+\lambda)x - 2y + z &= 0 \\ -2x + (1-\lambda)y - 2z &= 0 \\ x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \\ -2x + (1-\lambda)y - 2z &= 0 \qquad L_3 \leftrightarrow L_1 \\ -(2+\lambda)x - 2y + z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \\ 0 - (3+\lambda)y + -2(\lambda+3)z &= 0 \qquad L_2 + 2L_1 \to L_2 \\ 0 - 2(3+\lambda)y + (1-(2+\lambda)^2)z &= 0 \qquad L_3 + (2+\lambda)L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \\ 0 - (3+\lambda)y + -2(\lambda+3)z &= 0 \\ 0 - 2(3+\lambda)y + (1-(2+\lambda))(1+(2+\lambda))z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \\ -(3+\lambda)y + -2(\lambda+3)z &= 0 \\ -2(3+\lambda)y + (-1-\lambda)(3+\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \\ -(3+\lambda)y + -2(\lambda+3)z &= 0 \\ +(-1-\lambda+4)(3+\lambda)z &= 0 \qquad L_3 - 2L_2 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - (2+\lambda)z &= 0 \\ -(3+\lambda)y + -2(\lambda+3)z &= 0 \\ (3-\lambda)(3+\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Ainsi le système est de Cramer si et seulement si $3+\lambda = 0 \iff \lambda = -3$ et si $(3-\lambda)(3+\lambda) = 0 \iff \lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.

$\boxed{\text{Ainsi le système est de Cramer si et seulement si } \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -3.}$

(b) Résoudre le système selon les valeurs de λ.

- Si $\lambda \notin \{-3, 3\}$, le système (E_λ) est un système de Cramer, il admet donc une unique solution. Or $(0,0,0)$ est clairement solution de ce système. Donc
$\boxed{\text{Le système admet une unique solution } (0,0,0)}$
- Si $\lambda = 3$, alors d'après les calculs de la question précédente, il faut résoudre le système

$$(E_3) \iff \begin{cases} x - 2y - 5z &= 0 \\ -6y - 12z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 2y + 5z \\ y &= -2z \\ 0 &= 0 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} x &= z \\ y &= -2z \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solution de } (E_3) \text{ est } \{(x,y,z) = \alpha(1,-2,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$.

- Si $\lambda = -3$, alors d'après les calculs de la question précédente, il faut résoudre le système

$$(E_{-3}) \iff \begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 2y - z \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solution de } (E_{-3}) \text{ est } \{(x, y, z) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 3 - Inspiré EDHEC 1995

1. A l'instant 0, le mobile est en O donc

$$\boxed{P(E_{0,0}) = 1 \text{ et } P(E_{0,-1}) = P(E_{0,1}) = 0.}$$

Puisqu'à l'instant 0 le mobile est en O, il sera en A avec probabilité p et en B avec probabilité q, c'est à dire

$$\boxed{P(E_{1,0}) = 0,\ P(E_{1,1}) = p \text{ et } P(E_{1,-1}) = q}$$

2. (a) Le mobile ne reste pas sur place entre deux instants successifs donc pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\boxed{P_{E_{n,i}}(E_{n+1,i}) = 0.}$$

Si le mobile est en O à l'instant n, il sera à l'instant $n+1$ en A avec probabilité p et en B avec probabilité q donc

$$\boxed{P_{E_{n,0}}(E_{n+1,1}) = p \text{ et } P_{E_{n,0}}(E_{n+1,-1}) = q.}$$

Si le mobile est en A ou en B alors à l'instant $n+1$ il retourne en O donc

$$\boxed{P_{E_{n,1}}(E_{n+1,0}) = P_{E_{n,-1}}(E_{n+1,0}) = 1 \text{ et } P_{E_{n,1}}(E_{n+1,-1}) = P_{E_{n,-1}}(E_{n+1,1}) = 0.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\{E_{n,-1}, E_{n,0}, E_{n,1}\}$ est un système complet d'événements finis. On a donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$,

$$P(E_{n+1,i}) = P_{E_{n,-1}}(E_{n+1,i})P(E_{n,-1}) + P_{E_{n,0}}(E_{n+1,i})P(E_{n,0}) + P_{E_{n,1}}(E_{n+1,i})P(E_{n,1}).$$

En utilisant les résultats de la question (2)(a) on obtient

$$\boxed{\mathrm{P}(E_{n+1,-1}) = q\mathrm{P}(E_{n,0}),\ \mathrm{P}(E_{n+1,0}) = \mathrm{P}(E_{n,-1}) + \mathrm{P}(E_{n,1}) \text{ et } \mathrm{P}(E_{n+1,1}) = p\mathrm{P}(E_{n,0}).}$$

3. (a) Le résultat de la question (2)(b) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n+1,-1}) \\ \mathrm{P}(E_{n+1,0}) \\ \mathrm{P}(E_{n+1,1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n,-1}) \\ \mathrm{P}(E_{n,0}) \\ \mathrm{P}(E_{n,1}) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{U_{n+1} = MU_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$.
Pour $n = 0$ on a bien $M^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = M^n U_0$. Alors on a $U_{n+1} = MU_n = MM^n U_0 = M^{n+1} U_0$. Donc l'égalité reste vraie au rang $n+1$.

$$\boxed{\text{On a donc, pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0.}$$

(c) Le script Scilab est

```
n = input("Entrez n: ")
p = input("Entrez p: ")
q = input("Entrez q: ")

M = [0, q , 0 ; 1, 0, 1 ; 0, p, 0]
U0 = [0; 1; 0]
U = M^n*U0
disp(U)
```

4. (a) Pour montrer que Q est inversible il suffit de résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} qx_1 + x_2 + qx_3 &= y_1 \\ -x_1 + x_3 &= y_2 \\ px_1 - x_2 + px_3 &= y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + qx_3 &= y_1 + y_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -x_1 + x_3 &= y_2 \\ px_1 - x_2 + px_3 &= y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + qx_3 &= y_1 + y_3 \\ 2x_3 &= y_1 + y_2 + y_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -x_2 &= -py_1 + qy_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - pL_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_2 &= py_1 - qy_3 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & 0 & -2q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Vous pouvez également utiliser la méthode du cours pour trouver Q^{-1}

(b) Calculons QDQ^{-1}.

$$\begin{aligned} QDQ^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & 0 & -2q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } QDQ^{-1} = M.}$$

(c) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$.
Pour $n = 0$ on a bien $QD^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3 = M^0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = QD^nQ^{-1}$, alors

$$M^{n+1} = M^n M = QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

L'égalité reste donc vraie au rang $n+1$ et donc on a obtenu que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = QD^nQ^{-1}.}$$

5. (a) Tout d'abord, on sait d'après le cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons U_n.

$$U_n = M^nU_0 = QD^nQ^{-1}U_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q & 1 & q \\ -1 & 0 & 1 \\ p & -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & 0 & -2q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^nq & 0 & q \\ (-1)^{n+1} & 0 & 1 \\ (-1)^np & 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1}q + q \\ (-1)^n + 1 \\ (-1)^{n+1}p + p \end{pmatrix}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{P(E_{n,-1}) = \tfrac{q}{2}\left((-1)^{n+1} + 1\right),\ P(E_{n,0}) = \tfrac{1}{2}\left((-1)^n + 1\right) \text{ et } P(E_{n,1}) = \tfrac{p}{2}\left((-1)^{n+1} + 1\right)}$$

(b) On a en particulier $P(E_{2n,0}) = \frac{1}{2}\left((-1)^{2n} + 1\right) = 1$. On aurait pu prévoir ce résultat car à l'instant 0 le mobile est en O, à l'instant 1 en A ou B, à l'instant 2 le mobile revient en O, etc... Ainsi, à tout instant pair, le mobile est en O et donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'événement } E_{2n,0} \text{ est certain.}}$$